2025年山东省泰安市新泰市中考数学一模试卷

一.选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分，每小题只有一个选项符合要求。

1.（4分）四个有理数-3、-1、0、2，其中比-2小的有理数是(　　)

A．-3　　B．-1　　C．0　　D．2

2.（4分）剪纸艺术是最古老的中国民间艺术之一，新春佳节即将到来，赵大妈亲手剪制了如下四幅作品烘托节日气氛，其图形属于中心对称图形的是(　　)

A．

B．

C．

D．

3.（4分）在中国科研团队的努力下，氮化镓量子光源芯片问世，将芯片输出波长最大值从$0.0000000256m$扩展至原来的4倍左右．将0.0000000256用科学记数法表示应为(　　)

A．2.56×10^{-9}　　B．2.56×10^{-8}　　C．0.256×10^{-9}　　D．0.256×10^{-8}

4.（4分）“斗”是我国古代称量粮食的器具．如图1是一个口大底小无盖方形的“斗”，将它按图2方式摆放后的俯视图为(　　)

图1

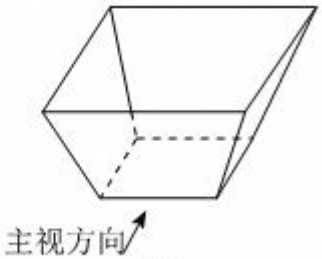
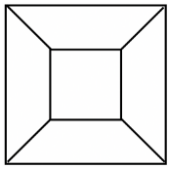
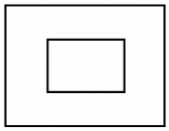
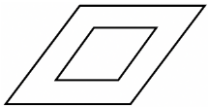
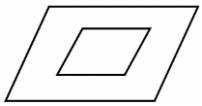


图2

A． 

B． 

C． 

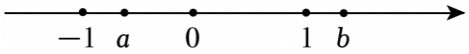
D． 

5.（4分）下列运算正确的是(　　)

A． $3a^2\cdot 2a^3=6a^6$　　B． $(6ab+a)\div a=6b$

C． $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$　　D． $(-a)^3\div(-a)^2=a$

6．（4 分）a，b 为有理数，它们在数轴上对应点的位置如图所示，下面四个结论中正确的是(　　)



A． $a+b<0$　　B． $ab>0$　　C． $|a-b|=a-b$　　D． $-a>-b$

7．（4 分）一组数据 5，8，12，x，15 的平均数为 y，则 y 关于 x 的函数关系式为(　　)

A． $y=\frac{1}{5}x+5$　　B． $y=x+40$　　C． $y=\frac{1}{5}x+40$　　D． $y=\frac{x}{5}+8$

8．（4 分）已知二次函数 $y=(x-3)(x+1)$，当 $0<x<4$ 时，则 y 的取值范围是(　　)

A． $-3<y<5$　　B． $-4\leqslant y<5$　　C． $-4\leqslant y<-3$　　D． $-4\leqslant y\leqslant 5$

9．（4 分）根据下列表格中的信息，y 代表的分式可能是(　　)

x	…	-2	-1		0	1	2	…
y	…	0		无意义	*	*	*	…

A． $\frac{x-1}{x+2}$　　B． $\frac{x+2}{x+1}$　　C． $\frac{x+2}{x-1}$　　D． $\frac{x-2}{x+1}$

10．（4 分）已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数且 $a<0$）过 $(-1,0)$ 和 $(m,0)$ 两点，且 $3<m<4$，下列四个结论：

①$c>0$；

②$1<-\frac{b}{2a}<\frac{3}{2}$；

③若关于 x 的方程 $a(x+1)(x-m)=3$ 有实数根，则 $4ac-b^2\geqslant 12a$；

④若抛物线过点 $(1,4)$，则 $-1<a<-\frac{2}{3}$.

其中，正确结论的个数是(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二.填空题：本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11．（4 分）因式分解：$-a+2a^2-a^3=$_____.

12．（4 分）方程 $\frac{x-3}{1-x}-1=\frac{2x}{x-1}$ 的解为____ .

13．（4 分）若关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+m=0$ 的两根为 x_1，x_2 且 $x_1=2x_2$，则 m 的值是 ____ .

14．（4 分）一个两位数，十位数字比个位数字的 2 倍大 1．若这个两位数减去 36 恰好等于个位数字与十

位数字对调后所得的两位数，设十位数字是 x，个位数字是 y，则列方程为____ .

15.（4 分）在平面直角坐标系中，对于点 $P(x,y)$，我们把点 $P'(-y+1,x+1)$ 叫作点 P 的“相伴点”．已知点 A_1 的“相伴点”为 A_2，点 A_2 的“相伴点”为 A_3，点 A_3 的“相伴点”为 A_4，…，这样依次得到点 A_1，A_2，A_3，…，A_n．若点 A_1 的坐标为 $(2,3)$，则点 A_{2025} 的坐标为____ .

三.解答题：本题共 8 小题，共 90 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16.（10 分）计算：

（1）$-2^2-\sqrt{12}+|1-4\sin 60°|+(\pi-\frac{22}{7})^0$；

（2）解不等式组：$\begin{cases}2x-5<3(x-1)\\ \frac{4}{3}x+1\le 3-\frac{2x}{3}\end{cases}$.

17.（10 分）（1）先化简，再求值 $(x+2+\frac{4}{x-2})\div\frac{x^3}{x^2-4x+4}$，其中 x 是满足条件 $x\leqslant 2$ 的合适的非负整数.

（2）化简并求值：$[(x+2y)(x-2y)-(x-2y)^2]\div(-2y)$，其中 $x=-1$，$y=-\frac{3}{2}$.

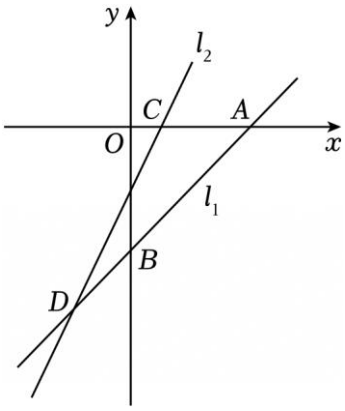
18.（10 分）定义：一次函数 $y=kx+b(k\ne 0$ 且 $b\ne 0)$ 和一次函数 $y=-bx-k$ 为“逆反函数”，如 $y=3x+2$ 和 $y=-2x-3$ 为“逆反函数”．如图 1，一次函数 $l_1: y=x-2$ 的图象分别交 x 轴、y 轴于点 A、B .

（1）请写出一次函数 l_1 的“逆反函数” l_2 的解析式 ____ ；点 $C(a,0)$ 在 l_2 的函数图象上，则 a 的值是 ____ .

（2）一次函数 l_1 图象上一点 $D(m,n)$ 又是它的“逆反函数” l_2 图象上的点，

①求出点 D 坐标；

②求出△ ACD 的面积.



19.（11 分）某商店经销甲、乙两种坚果，其中甲坚果每盒进价比乙坚果多 8 元，甲、乙坚果每盒售价分别是 68 元和 50 元，若该商场用 2400 元购进甲坚果和用 2000 元购进乙坚果数量一样多.

（1）求出甲、乙坚果每盒的进价分别为多少元？

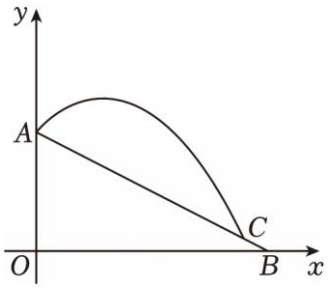
（2）若超市共购进了甲、乙两种坚果 100 盒，其中乙坚果数量不小于甲坚果数量的$\frac{3}{4}$，在两种坚果全部售完的情况下，求总利润的最大值？

20.（11 分）如图，护林员在一个斜坡上的点A处安装自动浇灌装置（其高度忽略不计）为坡地AB进行浇灌，$OA=10m$，点A处的自动浇灌装置喷出的水柱呈抛物线形，已知水柱在距出水口A的水平距离为$6m$时，达到距离地面OB的竖直高度的最大值为$13m$．以OB所在的水平方向为x轴，OA所在的竖直方向为y轴建立平面直角坐标系，如图所示，经过测量，可知斜坡AB的函数表达式为$y=-\frac{1}{2}x+10$．

（1）求图中水柱所在抛物线的函数表达式；

（2）若该装置浇灌的最远点C离地面的竖直高度为$1m$，求此时喷到C处的水柱距出水口的水平距离．

（3）给浇灌装置安装一个支架，可调节灌溉装置的高度，则水柱恰好可以覆盖整个坡地AB时，安装的支架的高度为多少米？



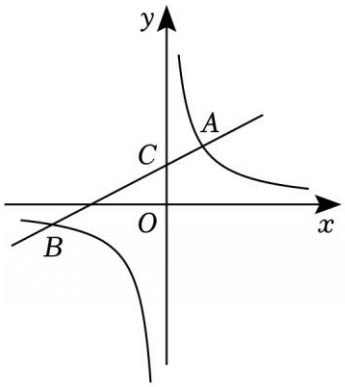
21.（12 分）如图，已知一次函数$y=\frac{3}{4}x+3$的图象与反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象交于$A(4,m)$，B两点，交y轴于点C．

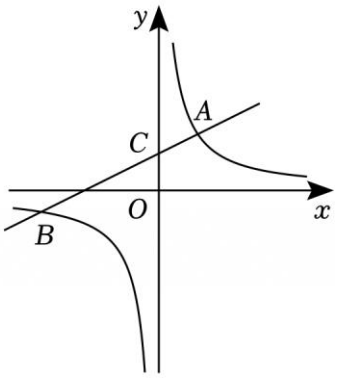
（1）求反比例函数的表达式和点B的坐标．

（2）过点C的直线交x轴于点E，且与反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象只有一个交点．

①求点E的坐标；

②求CE的长度．





备用图

22.（12 分）【问题提出】

在数学兴趣小组的研讨中，小蒙提出了自己遇到的问题：解不等式 $x^2<\frac{1}{x}$.

【问题探究】

数学老师启发小蒙从函数的角度解决这个问题：

如图 1，在平面直角坐标系中，分别画出函数 $y=x^2$ 和函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象，从函数角度看，解不等式 $x^2<\frac{1}{x}$ 相当于求抛物线 $y=x^2$ 在双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下方的点的横坐标的取值范围.

（1）观察图 1，可知两个图象的交点坐标为 ____，所以 $x^2<\frac{1}{x}$ 的解为 ____.

【类比探究】

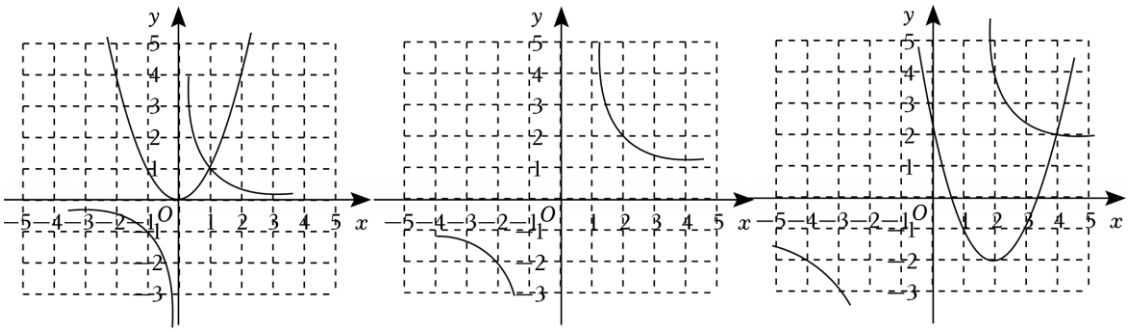
受此启发，小蒙尝试解不等式 $\frac{4}{x}+x-5>0$，经过分析，小蒙发现需要借助函数 $y=\frac{4}{x}$ 和函数 ____的图象来求解.

（2）请先完成上面的填空，再在图 2 中画出相应的函数图象，写出不等式 $\frac{4}{x}+x-5>0$ 的解集并说明理由.

【拓展应用】

小蒙想借助函数图象进一步研究不等式，于是尝试解不等式组 $\begin{cases}\frac{8}{x}-2x<0\\ x^2-4x+2-\frac{8}{x}<0\end{cases}$ 并进行了一些准备，如图 3 所示.

（3）请根据小蒙的思路分析，直接写出该不等式组的解集.



23.（14 分）已知，抛物线 $y=ax^2-3ax-3a+1(a<0)$ 与 y 轴交于点 A，过点 A 作 $AB//x$ 轴，与抛物线交于点 B.

（1）若抛物线经过点 $(-1,0)$；

①点 B 的坐标为____ ；

②当 $t-1\leqslant x\leqslant t$ 时，抛物线取得最大值为 $\frac{9}{4}$，求 t 的值；

（2）若点 $E(m+1,y_1)$，$F(m-1,y_2)$ 在抛物线上，且 $y_1<y_2$，求 m 的取值范围；

（3）已知，点 $G(1,3)$，$H(3,3)$，若抛物线与线段 GH 有且只有一个交点（不含端点 G 、H），请直接写出 a 的取值范围.

2025年山东省泰安市新泰市中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一．选择题（共10小题）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	B	A	C	D	D	B	B	C

一.选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分，每小题只有一个选项符合要求。

1.（4分）四个有理数-3、-1、0、2，其中比-2小的有理数是(　　)

A．-3　　B．-1　　C．0　　D．2

【分析】根据正数大于零，零大于负数，可得答案．

【解答】解：由题意可得：$-3<-2<-1<0<2$，

故选：A．

【点评】本题考查了有理数大小比较，利用正数大于零，零大于负数是解题关键．

2.（4分）剪纸艺术是最古老的中国民间艺术之一，新春佳节即将到来，赵大妈亲手剪制了如下四幅作品烘托节日气氛，其图形属于中心对称图形的是(　　)

A．

B．

C．

D．

【分析】根据中心对称图形的概念判断．把一个图形绕某一点旋转$180°$，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形．

【解答】解：选项A、B、C的图形都不能找到一个点，使图形绕某一点旋转$180°$后与原来的图形重合，所以不是中心对称图形．

选项D的图形能找到一个点，使图形绕某一点旋转$180°$后与原来的图形重合，所以是中心对称图形．

故选：D．

【点评】本题考查的是中心对称图形，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转180度后与自身重合．

3.（4 分）在中国科研团队的努力下，氮化镓量子光源芯片问世，将芯片输出波长最大值从 $0.0000000256m$ 扩展至原来的 4 倍左右．将 0.0000000256 用科学记数法表示应为(　　)

A．2.56×10^{-9}　　B．2.56×10^{-8}　　C．0.256×10^{-9}　　D．0.256×10^{-8}

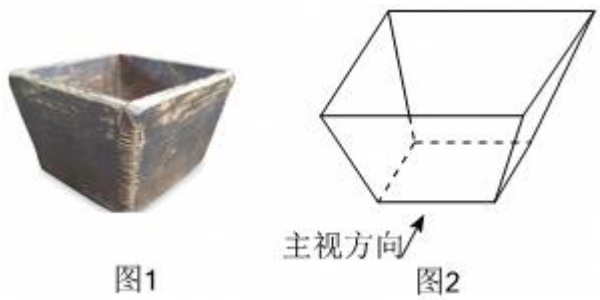
【分析】科学记数法的表示形式为 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 $\geqslant10$ 时，n 是正数；当原数的绝对值 <1 时，n 是负数．

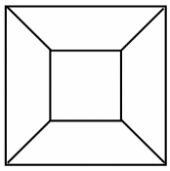
【解答】解：$0.0000000256=2.56\times10^{-8}$．

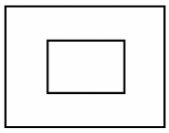
故选：B．

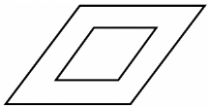
【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

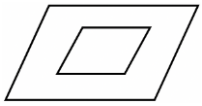
4.（4 分）“斗”是我国古代称量粮食的器具．如图 1 是一个口大底小无盖方形的“斗”，将它按图 2 方式摆放后的俯视图为(　　)



A． 

B． 

C． 

D． 

【分析】根据俯视图是从上面看到的图形进行求解即可．

【解答】解：从上面看，可得选项 A 的图形．

故选：A．

【点评】本题主要考查了简单组合体的三视图，熟知俯视图是从上面看到的图形是解题的关键．

5.（4 分）下列运算正确的是(　　)

A．$3a^{2}\cdot2a^{3}=6a^{6}$　　B．$(6ab+a)\div a=6b$

C．$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$　　D．$(-a)^3\div(-a)^2=a$

【分析】利用单项式乘单项式，多项式除以单项式，多项式乘多项式，同底数幂除法法则逐项判断即可．

【解答】解：$3a^2\cdot 2a^3=6a^5$，则A不符合题意，

$(6ab+a)\div a=6b+1$，则B不符合题意，

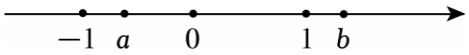
$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$，则$C$符合题意，

$(-a)^3\div(-a)^2=-a$，则D不符合题意，

故选：C．

【点评】本题考查整式的混合运算，熟练掌握相关运算法则是解题的关键．

6．（4分）a，b为有理数，它们在数轴上对应点的位置如图所示，下面四个结论中正确的是(　　)



A．$a+b<0$　　B．$ab>0$　　C．$|a-b|=a-b$　　D．$-a>-b$

【分析】由数轴可知$-<a<0$，$b>1$、$|b|>|a|$，然后逐项判断即可．

【解答】解：由数轴可知$-1<a<0$，$b>1$、$|b|>|a|$，逐项分析判断如下：

A．$a+b>0$，即A选项错误，不符合题意；

B．$ab<0$，即B选项错误，不符合题意；

C．易得$a-b<0$，$|a-b|=b-a$，即C选项错误，不符合题意；

D．$-a>-b$，即D选项正确，符合题意．

故选：D．

【点评】本题考查了数轴、绝对值、有理数的加减法、乘法运算法则等知识点，正确判断a、b的符号及其绝对值的大小关系是解题的关键．

7．（4分）一组数据5，8，12，x，15的平均数为y，则y关于x的函数关系式为(　　)

A．$y=\frac{1}{5}x+5$　　B．$y=x+40$　　C．$y=\frac{1}{5}x+40$　　D．$y=\frac{x}{5}+8$

【分析】根据算式平均数的计算方法，可以写出则y关于x的函数关系式．

【解答】解：由题意可得，

$y=(5+8+12+x+15)\div 5=\frac{1}{5}x+8$，

即y关于x的函数关系式为$y=\frac{1}{5}x+8$，

故选：D．

【点评】本题考查算术平均数、函数关系式，解答本题的关键是明确题意，求出相应的函数解析式．

8．（4 分）已知二次函数 $y=(x-3)(x+1)$，当 $0<x<4$ 时，则 y 的取值范围是(　　)

A．$-3<y<5$　　B．$-4\leqslant y<5$　　C．$-4\leqslant y<-3$　　D．$-4\leqslant y\leqslant 5$

【分析】依据题意，由 $y=(x-3)(x+1)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，则当 $x=1$ 时，y 取最小值为 -4，又当 $x=0$ 时，$y=-3$；当 $x=4$ 时，$y=5$，从而可得当 $0<x<4$ 时，$-4\leqslant y<5$，进而可以判断得解．

【解答】解：由题意，$\because y=(x-3)(x+1)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，y 取最小值为 -4．

又 $\because$ 当 $x=0$ 时，$y=-3$；当 $x=4$ 时，$y=5$，

$\therefore$ 当 $0<x<4$ 时，$-4\leqslant y<5$．

故选：B．

【点评】本题主要考查了二次函数的性质、二次函数图象上点的坐标特征，解题时要熟练掌握并能灵活运用二次函数的性质是关键．

9．（4 分）根据下列表格中的信息，y 代表的分式可能是(　　)

x	$\cdots$	-2	-1		0	1	2	$\cdots$
y	$\cdots$	0		无意义	*	*	*	$\cdots$

A．$\dfrac{x-1}{x+2}$　　B．$\dfrac{x+2}{x+1}$　　C．$\dfrac{x+2}{x-1}$　　D．$\dfrac{x-2}{x+1}$

【分析】根据分式无意义可知分母为 $x+1$，排除选项 A 和 C，再根据当 $x=-2$ 时 $y=0$ 即可判定选项．

【解答】解：由表格可知当 $x=-1$ 时分式无意义，即分母为 $x+1$，

当 $x=-2$ 时，分式 $\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{-2+2}{-2+1}=0$，$\dfrac{x-2}{x+1}\neq 0$，

故选：B．

【点评】本题考查了分式有意义的条件，理解题意是解题的关键．

10．（4 分）已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数且 $a<0$）过 $(-1,0)$ 和 $(m,0)$ 两点，且 $3<m<4$，下列四个结论：

①$c>0$；

②$1<-\dfrac{b}{2a}<\dfrac{3}{2}$；

③若关于 x 的方程 $a(x+1)(x-m)=3$ 有实数根，则 $4ac-b^2\geqslant 12a$；

④若抛物线过点 $(1,4)$，则 $-1<a<-\dfrac{2}{3}$．

其中，正确结论的个数是(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【分析】①根据题意得出开口向下，对称轴在 y 轴的右侧，即可判 $c>0$；

②根据抛物线 $y=ax^2+bx+c$(a，b，c 是常数且 $a<0$) 过 $(-1,0)$ 和 $(m,0)$ 两点，且 $3<m<4$，由对称轴公式即可求得 $1<-\frac{b}{2a}<\frac{3}{2}$；

③抛物线 $y=ax^2+bx+c$(a，b，c 是常数且 $a<0$) 与直线 $y=3$ 有交点，即可得出 $\frac{4ac-b^2}{4a}\geqslant 3$，求得 $4ac-b^2\leqslant 12a$；

④根据题意抛物线为 $y=a(x+1)(x-m)=ax^2+a(1-m)x-am$，即可得出 $-am=2-a$，则 $m=\frac{a-2}{a}=1-\frac{2}{a}$，根据 $3<m<4$，即可得出关于 a 的不等式，解得即可．

【解答】解：$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$(a，b，c 是常数)，过 $A(-1,0)$，$B(m,0)$ 两点，且 $3<m<4$，

$\therefore \frac{-1+3}{2}<-\frac{b}{2a}<\frac{-1+4}{2}$，即 $1<-\frac{b}{2a}<\frac{3}{2}$，故②正确；

$\therefore$ 对称轴在 y 轴右侧，

$\because a<0$，

$\therefore c>0$，

故①正确；

$\because$ 若关于 x 的方程 $a(x+1)(x-m)=3$ 有实数根，

$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$(a，b，c 是常数且 $a<0$) 与直线 $y=3$ 有交点，

$\therefore \frac{4ac-b^2}{4a}\geqslant 3$，

$\therefore 4ac-b^2\leqslant 12a$，故③错误；

$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$(a，b，c 是常数)，过 $A(-1,0)$，点 $(1,4)$，

$\therefore \begin{cases} a-b+c=0 \\ a+b+c=4 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b=2 \\ c=2-a \end{cases}$，

$\because$ 抛物线 $y=ax^2+2x+2-a$，

$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数且 $a<0$）过 $(-1,0)$ 和 $(m,0)$ 两点，

$\therefore y=a(x+1)(x-m)=ax^2+a(1-m)x-am$，

$\therefore -am=2-a$，

$\therefore m=\dfrac{a-2}{a}=1-\dfrac{2}{a}$，

$\because 3<m<4$，

$\therefore 3<1-\dfrac{2}{a}<4$，

$\because a<0$，

$\therefore -1<a<-\dfrac{2}{3}$．故④正确．

故选：C．

【点评】本题考查二次函数图象与系数的关系，二次函数图象上点的坐标特征，二次函数的性质，函数与方程的关系，抛物线与 x 轴的交点，解题的关键是读懂图象信息，灵活运用所学知识解决问题．

二.填空题：本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11．（4 分）因式分解：$-a+2a^2-a^3=$__$-a(a-1)^2$__．

【分析】先提取公因式 $-a$，再根据完全平方公式进行二次分解．完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$．

【解答】解：$-a+2a^2-a^3$

$=-a(a^2-2a+1)$ – –（提取公因式）

$=-a(a-1)^2$． – –（完全平方公式）

故答案为：$-a(a-1)^2$．

【点评】本题考查了提公因式法，公式法分解因式，提取公因式后利用完全平方公式进行二次分解，注意分解要彻底．

12．（4 分）方程 $\dfrac{x-3}{1-x}-1=\dfrac{2x}{x-1}$ 的解为__无解__．

【分析】将分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程 x 的值，经检验即可得到分式方程的解．

【解答】解：去分母得：$x-3-(1-x)=-2x$，

去括号得：$x-3-1+x=-2x$，

移项得：$x+x+2x=3+1$，

合并同类项得：$4x=4$，

系数化为 1 得：$x=1$，

检验把 $x=1$ 代入 $1-x=0$，

$\therefore x=1$ 是增根，

$\therefore$ 分式方程无解.

【点评】本题考查了解分式方程，解题的关键将 x 的值代入分母中，检验分式方程的解.

13.（4 分）若关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+m=0$ 的两根为 x_1，x_2 且 $x_1=2x_2$，则 m 的值是 __8__ .

【分析】先利用根与系数的关系得 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=m$，则利用 $x_1=2x_2$，然后解方程组求出 x_1、x_2 的值，最后计算出 m 的值.

【解答】解：根据根与系数的关系得 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=m$，

$\because x_1=2x_2$，

$\therefore 2x_2+x_2=6$，

解得 $x_2=2$，

$\therefore x_1=2\times2=4$，

$\therefore m=4\times2=8$.

故答案为：8.

【点评】本题考查了根与系数的关系：若 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根与系数的关系为：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

14.（4 分）一个两位数，十位数字比个位数字的 2 倍大 1．若这个两位数减去 36 恰好等于个位数字与十位数字对调后所得的两位数，设十位数字是 x，个位数字是 y，则列方程为__$\begin{cases}x-2y=1\\10x+y-36=10y+x\end{cases}$__ .

【分析】根据“十位数字比个位数字的 2 倍大 1，且这个两位数减去 36 恰好等于个位数字与十位数字对调后所得的两位数”，即可列出关于 x，y 的二元一次方程组，此题得解.

【解答】解：$\because$ 十位数字比个位数字的 2 倍大 1，

$\therefore x-2y=1$；

$\because$ 这个两位数减去 36 恰好等于个位数字与十位数字对调后所得的两位数，

$\therefore 10x+y-36=10y+x$.

$\therefore$ 根据题意可列出方程组 $\begin{cases} x-2y=1 \\ 10x+y-36=10y+x \end{cases}$.

故答案为：$\begin{cases} x-2y=1 \\ 10x+y-36=10y+x \end{cases}$.

【点评】本题考查了由实际问题抽象出二元一次方程组，找准等量关系，正确列出二元一次方程组是解题的关键.

15.（4 分）在平面直角坐标系中，对于点 $P(x,y)$，我们把点 $P'(-y+1,x+1)$ 叫作点 P 的“相伴点”．已知点 A_1 的“相伴点”为 A_2，点 A_2 的“相伴点”为 A_3，点 A_3 的“相伴点”为 A_4，…，这样依次得到点 A_1，A_2，A_3，…，A_n．若点 A_1 的坐标为 $(2,3)$，则点 A_{2025} 的坐标为__ $(2,3)$ __ .

【分析】根据题意，依次求出点 A_2，A_3，A_4，…，的坐标，发现规律即可解决问题.

【解答】解：由题知，

因为点 A_1 的坐标为 $(2,3)$，

则 $-3+1=-2$，$2+1=3$，

所以点 A_2 的坐标为 $(-2,3)$.

同理可得，点 A_3 的坐标为 $(-2,-1)$，点 A_4 的坐标为 $(2,-1)$，点 A_5 的坐标为 $(2,3)$，…，

由此可见，从点 A_1 开始，这列点的坐标按 $(2,3)$，$(-2,3)$，$(-2,-1)$，$(2,-1)$ 循环.

又因为 $2025\div4=506$ 余 1，

所以点 A_{2025} 的坐标为 $(2,3)$.

故答案为：$(2,3)$.

【点评】本题主要考查了点的坐标变化规律，能通过计算发现从点 A_1 开始，这列点的坐标按 $(2,3)$，$(-2,3)$，$(-2,-1)$，$(2,-1)$ 循环是解题的关键.

三.解答题：本题共 8 小题，共 90 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16.（10 分）计算：

（1）$-2^2-\sqrt{12}+|1-4\sin60^\circ|+(\pi-\frac{22}{7})^0$；

（2）解不等式组：$\begin{cases} 2x-5<3(x-1) \\ \frac{4}{3}x+1\le3-\frac{2x}{3} \end{cases}$.

【分析】（1）根据有理数的乘方的定义，算术平方根的定义，特殊角的三角函数值以及零指数幂的定义计算即可；

（2）分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【解答】解：（1）原式$=-4-2\sqrt{3}+|1-4\times\frac{\sqrt{3}}{2}|+1$

$=-4-2\sqrt{3}+|1-2\sqrt{3}|+1$

$=-4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1+1$

$=-4$；

（2）$\begin{cases}2x-5<3(x-1)① \\ \frac{4}{3}x+1\le 3-\frac{2x}{3}②\end{cases}$，

由①得：$x>-2$，

由②得：$x\leqslant 1$，

则不等式组的解集为$-2<x\leqslant 1$.

【点评】本题考查了实数的运算以及解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

17.（10 分）（1）先化简，再求值$(x+2+\frac{4}{x-2})\div\frac{x^3}{x^2-4x+4}$，其中$x$是满足条件$x\leqslant 2$的合适的非负整数.

（2）化简并求值：$[(x+2y)(x-2y)-(x-2y)^2]\div(-2y)$，其中$x=-1$，$y=-\frac{3}{2}$.

【分析】（1）根据分式的加法法则、除法法则把原式化简，根据分式有意义的条件确定x的值，代入计算即可；

（2）根据平方差公式、完全平方公式、合并同类项、多项式除以单项式把原式化简，把x、y的值代入计算得到答案.

【解答】解：（1）原式$=(\frac{x^2-4}{x-2}+\frac{4}{x-2})\cdot\frac{x^2-4x+4}{x^3}$

$=\frac{x^2}{x-2}\cdot\frac{(x-2)^2}{x^3}$

$=\frac{x-2}{x}$，

满足条件$x\leqslant 2$的非负整数有 0、1、2，

由题意得：$x\neq 0$和 2，

当 $x=1$ 时，原式 $=\frac{1-2}{1}=-1$；

（2）$[(x+2y)(x-2y)-(x-2y)^2]\div(-2y)$

$=[x^2-4y^2-(x^2-4xy+4y^2)]\div(-2y)$

$=(x^2-4y^2-x^2+4xy-4y^2)\div(-2y)$

$=(-8y^2+4xy)\div(-2y)$

$=4y-2x$，

当 $x=-1$，$y=-\frac{3}{2}$ 时，原式 $=4\times(-\frac{3}{2})-2\times(-1)=-6+2=-4$．

【点评】本题考查的是整式、分式的化简求值，掌握整式、分式的混合运算法则是解题的关键．

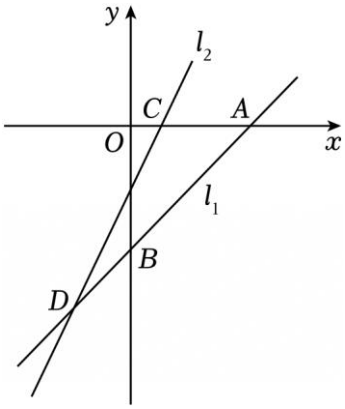
18．（10 分）定义：一次函数 $y=kx+b(k\neq 0$ 且 $b\neq 0)$ 和一次函数 $y=-bx-k$ 为“逆反函数”，如 $y=3x+2$ 和 $y=-2x-3$ 为“逆反函数”．如图 1，一次函数 $l_1: y=x-2$ 的图象分别交 x 轴、y 轴于点 A、B．

（1）请写出一次函数 l_1 的“逆反函数” l_2 的解析式 __$y=2x-1$__；点 $C(a,0)$ 在 l_2 的函数图象上，则 a 的值是 ____．

（2）一次函数 l_1 图象上一点 $D(m,n)$ 又是它的“逆反函数” l_2 图象上的点，

①求出点 D 坐标；

②求出△ ACD 的面积．



【分析】（1）由新定义求出函数表达式，即可求解；

（2）①一次函数 l_1 图象上一点 $D(m,n)$ 又是它的“逆反函数” l_2 图象上的点，即可求解；

②由△ ACD 的面积 $=\frac{1}{2}AC\times|y_D|=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 3=\frac{9}{4}$，即可求解．

【解答】解：（1）由新定义知，l_2 的解析式 $y=2x-1$，

把点 C 的坐标代入上式得：$2a-1=0$，则 $a=\frac{1}{2}$，

故答案为：$y=2x-1$，$\frac{1}{2}$；

（2）①$\because$ 一次函数 l_1 图象上一点 $D(m,n)$ 又是它的“逆反函数” l_2 图象上的点，

则点 D 是两个函数的交点，即 $2x-1=x-2$，则 $x=-1$，即点 $D(-1,-3)$；

②由两个函数表达式知，点 A、C 的坐标分别为：$(\frac{1}{2}$，$0)$、$(2,0)$，则 $AC=\frac{3}{2}$，

则△ ACD 的面积 $=\frac{1}{2}AC\times|y_D|=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3=\frac{9}{4}$.

【点评】本题考查的是一次函数综合运用，涉及到三角形全等、新定义、面积的计算，正确地理解题意是解题的关键.

19.（11 分）某商店经销甲、乙两种坚果，其中甲坚果每盒进价比乙坚果多 8 元，甲、乙坚果每盒售价分别是 68 元和 50 元，若该商场用 2400 元购进甲坚果和用 2000 元购进乙坚果数量一样多.

（1）求出甲、乙坚果每盒的进价分别为多少元？

（2）若超市共购进了甲、乙两种坚果 100 盒，其中乙坚果数量不小于甲坚果数量的 $\frac{3}{4}$，在两种坚果全部售完的情况下，求总利润的最大值？

【分析】（1）根据“用 2400 元购进甲坚果和用 2000 元购进乙坚果数量一样多”列方程求解；

（2）先根据“总利润 $=$ 两种坚果的利润和”列出函数关系式，再根据一次函数的性质求解.

【解答】解：（1）设甲坚果每盒的进价为 x 元，

则：$\frac{2400}{x}=\frac{2000}{x-8}$，

解得：$x=48$，

经检验：$x=48$ 是原方程的解，

$\therefore x-8=40$，

答：甲坚果的进价为 48 元、乙坚果每盒的进价为 40 元；

（2）设甲坚果购进 a 盒，总利润为 y 元，

则：$y=(68-48)a+(50-40)(100-a)=10a+1000$，

$\because 100-a\geqslant\frac{3}{4}a$，

$\therefore a\leqslant57\frac{1}{7}$，

$\therefore a$ 的最大值为 57，

$\because 10>0$，

$\therefore y$ 随 a 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $a=57$ 时，y 取最大值，为 $57\times10+1000=1570$（元），

答：总利润的最大值为 1570 元.

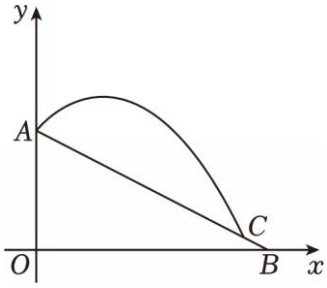
【点评】本题考查了分式方程的应用，找到相等关系和掌握一次函数的性质是解题的关键.

20.（11 分）如图，护林员在一个斜坡上的点 A 处安装自动浇灌装置（其高度忽略不计）为坡地 AB 进行浇灌，$OA=10m$，点 A 处的自动浇灌装置喷出的水柱呈抛物线形，已知水柱在距出水口 A 的水平距离为 $6m$ 时，达到距离地面 OB 的竖直高度的最大值为 $13m$．以 OB 所在的水平方向为 x 轴，OA 所在的竖直方向为 y 轴建立平面直角坐标系，如图所示，经过测量，可知斜坡 AB 的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+10$.

（1）求图中水柱所在抛物线的函数表达式；

（2）若该装置浇灌的最远点 C 离地面的竖直高度为 $1m$，求此时喷到 C 处的水柱距出水口的水平距离.

（3）给浇灌装置安装一个支架，可调节灌溉装置的高度，则水柱恰好可以覆盖整个坡地 AB 时，安装的支架的高度为多少米？



【分析】（1）设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-6)^2+13$．把 $A\quad(0,10)$ 代入即可求解；

（2）对于直线 $ABy=-\frac{1}{2}x+10$，将 $y=1$ 代入即可；

（3）设平移后的抛物线表达式为 $y\quad=-\frac{1}{12}(x-6)^2+13+h$，将 $B\quad(20,0)$ 代入 $y=-\frac{1}{12}(x-6)^2+I3+h$，即可求解.

【解答】解：（1）由题意，可知 $A\quad(0,10)$，抛物线的顶点坐标为 $(6,13)$，

$\therefore$ 设抛物线的函数表达式为 $y=a\quad(x-6)^2+13$.

把 $A\quad(0,10)$ 代入，

得 $36a+13=10$，

解得 $a=-\frac{1}{12}$，

$\therefore$ 水柱所在抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{12}(x-6)^2+13$.

（2）对于直线 $ABy=-\frac{1}{2}x+10$．当 $y=1$ 时，$1=-\frac{1}{2}x+10$，

解得 $x=18$．喷到 C 处的水柱距出水口的水平距离为 18 m；

（3）设安装的支架高度为 h 米，即抛物线向上平移 h 个单位长度．设平移后的抛物线表达式为 $y=-\frac{1}{12}(x-6)^2+13+h$，

解得 $x=20$．

$\therefore B\quad(20,0)$．

将 $B\quad(20,0)$ 代入 $y=-\frac{1}{12}(x-6)^2+I3+h$，

得 $-\frac{1}{12}(20-6)^2+13+h\quad=0$，

解得 $h=\frac{10}{3}$．

$\therefore$ 水柱恰好可以覆盖整个坡地 AB 时，安装的支架的高度为 $\frac{10}{3}$ 米．

【点评】本题考查二次函数的应用，正确进行计算是解题关键．

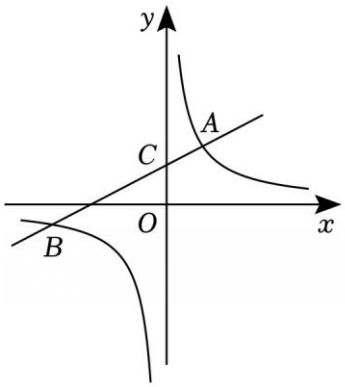
21．（12 分）如图，已知一次函数 $y=\frac{3}{4}x+3$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象交于 $A(4,m)$，B 两点，交 y 轴于点 C．

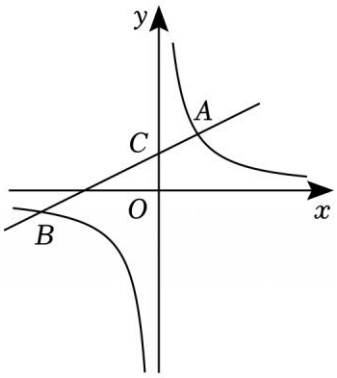
（1）求反比例函数的表达式和点 B 的坐标．

（2）过点 C 的直线交 x 轴于点 E，且与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象只有一个交点．

①求点 E 的坐标；

②求 CE 的长度．





备用图

【分析】（1）由一次函数解析式求得点 A，然后利用待定系数法求得反比例函数的解析式，两解析式联立成方程组，解方程组即可求得点 B 的坐标；

（2）①设直线 CE 的解析式为 $y=ax+2$，由 $ax+2=\frac{6}{x}$ 整理得，$ax^2+2x-6=0$，根据题意得到△$=2^2-4a\cdot(-6)=0$，求得 $a=-\frac{1}{6}$，即可得到直线 CE 的解析式，从而即可求得 E 点的坐标；

②利用勾股定理即可求得 CE．

【解答】解：（1）$\because$ 直线 $y=\frac{3}{4}x+3$ 过点 $(4,m)$，

$\therefore m=\frac{3}{4}\times4+3=6$，

$\therefore A(4,6)$，

又 $\because$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象过点 $A(4,6)$，

$\therefore k=4\times6=24$，

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{24}{x}$，

联立 $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x+3 \\ y=\frac{24}{x} \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-8 \\ y=-3 \end{cases}$，

$\therefore B(-8,-3)$；

（2）①在 $y=\frac{3}{4}x+3$ 中，令 $x=0$，得 $y=3$，

$\therefore C(0,3)$，

设直线 CE 的解析式为 $y=kx+3$，

联立 $\begin{cases} y=kx+3 \\ y=\frac{24}{x} \end{cases}$，

得 $kx^2+3x-24=0$，

$\because$ 直线 CE 与双曲线 $y=\frac{24}{x}$ 只有一个交点，

$\therefore$ △$=9+96k=0$，

$\therefore k=-\frac{3}{32}$，

$\therefore$ 直线 CE 的解析式为 $y=-\frac{3}{32}x+3$，

令 $y=0$，得 $x=32$，

$\therefore E(32,0)$，

② $CE=\sqrt{32^2+3^2}=\sqrt{1033}$.

【点评】本题是反比例函数与一次函数的交点问题，考查了一次函数图象上点的坐标特征，待定系数法求反比例函数和一次函数的解析式，勾股定理，灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.

22.（12 分）【问题提出】

在数学兴趣小组的研讨中，小蒙提出了自己遇到的问题：解不等式 $x^2<\frac{1}{x}$.

【问题探究】

数学老师启发小蒙从函数的角度解决这个问题：

如图 1，在平面直角坐标系中，分别画出函数 $y=x^2$ 和函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象，从函数角度看，解不等式 $x^2<\frac{1}{x}$ 相当于求抛物线 $y=x^2$ 在双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下方的点的横坐标的取值范围.

（1）观察图 1，可知两个图象的交点坐标为 __(1,1)__，所以 $x^2<\frac{1}{x}$ 的解为 ____.

【类比探究】

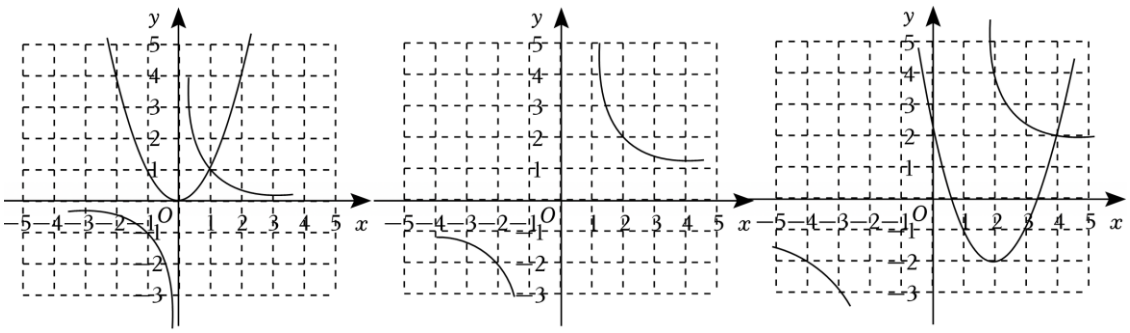
受此启发，小蒙尝试解不等式 $\frac{4}{x}+x-5>0$，经过分析，小蒙发现需要借助函数 $y=\frac{4}{x}$ 和函数 ____的图象来求解.

（2）请先完成上面的填空，再在图 2 中画出相应的函数图象，写出不等式 $\frac{4}{x}+x-5>0$ 的解集并说明理由.

【拓展应用】

小蒙想借助函数图象进一步研究不等式，于是尝试解不等式组 $\begin{cases}\frac{8}{x}-2x<0\\ x^2-4x+2-\frac{8}{x}<0\end{cases}$ 并进行了一些准备，如图 3 所示.

（3）请根据小蒙的思路分析，直接写出该不等式组的解集.



【分析】（1）观察图象解答即可；

（2）画出函数的图象，观察图象解答即可；

（3）观察图象解答即可．

【解答】解：【问题探究】

（1）观察图 1，可知两个图象的交点坐标为 $(1,1)$，所以 $x^2<\frac{1}{x}$ 的解为 $0<x<1$．

故答案为：$(1,1)$，$0<x<1$；

【类比探究】

受此启发，小蒙尝试解不等式 $\frac{4}{x}+x-5>0$，经过分析，小蒙发现需要借助函数 $y=\frac{4}{x}$ 和函数 $y=-x+5$ 的图象来求解．

故答案为：$y=-x+5$；

（2）如图所示，

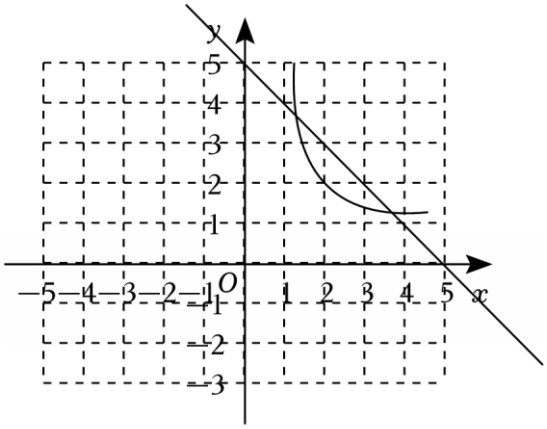


图2

该不等式组的解集是 $0<x<1$ 或 $x>4$；

从函数角度看，解不等式 $\frac{4}{x}+x-5>0$ 相当于求双曲线 $y=\frac{4}{x}$，

在直线 $y=-x+5$ 上方的点的横坐标的取值范围．

由图象可知，$y=\frac{4}{x}$ 与 $y=-x+5$ 的交点分别为 $(1,4)$ 和 $(4,1)$，因此解集为 $0<x<1$ 或 $x>4$；

【拓展应用】

（3）该不等式组的解集是 $2<x<4$．

【点评】本题主要考查了反比例函数图象上点的坐标特征，二次函数与不等式，数形结合的思想方法，本题是阅读型题目，理解题干中的解题的思想方法并熟练运用是解题的关键．

23．（14 分）已知，抛物线 $y=ax^2-3ax-3a+1(a<0)$ 与 y 轴交于点 A，过点 A 作 $AB//x$ 轴，与抛物线交于点 B．

（1）若抛物线经过点 $(-1,0)$；

①点 B 的坐标为__ $(3,4)$ __；

②当 $t-1\leqslant x\leqslant t$ 时，抛物线取得最大值为 $\frac{9}{4}$，求 t 的值；

（2）若点 $E(m+1,y_1)$，$F(m-1,y_2)$ 在抛物线上，且 $y_1<y_2$，求 m 的取值范围；

（3）已知，点 $G(1,3)$，$H(3,3)$，若抛物线与线段 GH 有且只有一个交点（不含端点 G、H），请直接写出 a 的取值范围.

【分析】（1）求出 $y=-x^2+3x+4$，

①令 $x=0$ 得 $A(0,4)$，令 $y=4$ 得 $4=-x^2+3x+4$，可解得 $B(3,4)$；

②求出抛物线 $y=-x^2+3x+4$ 的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$，最大值为 $\frac{25}{4}$，当 $t\leqslant\frac{3}{2}$ 时，$-t^2+3t+4=\frac{9}{4}$，解得 $t=\frac{7}{2}$（舍去）或 $t=-\frac{1}{2}$，当 $t>\frac{3}{2}$ 且 $t-1\leqslant\frac{3}{2}$，即 $\frac{3}{2}<t\leqslant\frac{5}{2}$ 时，$y=-x^2+3x+4$ 的最大值为 $\frac{25}{4}$，与抛物线取得最大值 $\frac{9}{4}$ 不符合；当 $t-1>\frac{3}{2}$，即 $t>\frac{5}{2}$ 时，$-(t-1)^2+3(t-1)+4=\frac{9}{4}$，解得 $t=\frac{9}{2}$ 或 $t=\frac{1}{2}$（舍去）；

（2）由点 $E(m+1,y_1)$，$F(m-1,y_2)$ 在抛物线 $y=ax^2-3ax-3a+1$ 上，$y_1<y_2$，可得 $a(m+1)^2-3a(m+1)-3a+1<a(m-1)^2-3a(m-1)-3a+1$，又 $a<0$，可解得 $m>\frac{3}{2}$；

（3）求出抛物线顶点为 $(\frac{3}{2},\frac{4-21a}{4})$，对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$，当顶点 $(\frac{3}{2},\frac{4-21a}{4})$ 在线段 GH 上时，抛物线与线段 GH 有且只有一个交点，故 $\frac{4-21a}{4}=3$，解得 $a=-\frac{8}{21}$；当抛物线 $y=ax^2-3ax-3a+1$ 过 $G(1,3)$ 时，$3=a-3a-3a+1$，解得 $a=-\frac{2}{5}$，当抛物线 $y=ax^2-3ax-3a+1$ 过 $G(3,3)$ 时，$3=9a-9a-3a+1$，解得 $a=-\frac{2}{3}$，画出草图，根据二次函数性质可得 a 的范围是 $-\frac{2}{3}<a<-\frac{2}{5}$.

【解答】解：（1）把 $(-1,0)$ 代入 $y=ax^2-3ax-3a+1$ 得 $a+3a-3a+1=0$，

解得 $a=-1$，

$\therefore y=-x^2+3x+4$，

①在 $y=-x^2+3x+4$ 中，令 $x=0$ 得 $y=4$，

$\therefore A(0,4)$，

在 $y=-x^2+3x+4$ 中，令 $y=4$ 得 $4=-x^2+3x+4$，

解得 $x=0$ 或 $x=3$，

$\therefore B(3,4)$；

故答案为：$(3,4)$；

②$\because y=-x^2+3x+4=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{25}{4}$，

$\therefore$抛物线$y=-x^2+3x+4$的对称轴为直线$x=\frac{3}{2}$，最大值为$\frac{25}{4}$，

当$t\leqslant\frac{3}{2}$时，y随x的增大而增大，

$\therefore x=t$时，$y=-x^2+3x+4$取最大值$\frac{9}{4}$，

$\therefore -t^2+3t+4=\frac{9}{4}$，

解得$t=\frac{7}{2}$（舍去）或$t=-\frac{1}{2}$，

当$t>\frac{3}{2}$且$t-1\leqslant\frac{3}{2}$，即$\frac{3}{2}<t\leqslant\frac{5}{2}$时，$y=-x^2+3x+4$的最大值为$\frac{25}{4}$，与抛物线取得最大值$\frac{9}{4}$不符合；

当$t-1>\frac{3}{2}$，即$t>\frac{5}{2}$时，y随x增大而减小，

$\therefore x=t-1$时，$y=-x^2+3x+4$取最大值$\frac{9}{4}$，

$\therefore -(t-1)^2+3(t-1)+4=\frac{9}{4}$，

解得$t=\frac{9}{2}$或$t=\frac{1}{2}$（舍去），

综上所述，t的值为$-\frac{1}{2}$或$\frac{9}{2}$；

（2）$\because$点$E(m+1,y_1)$，$F(m-1,y_2)$在抛物线$y=ax^2-3ax-3a+1$上，

$\therefore y_1=a(m+1)^2-3a(m+1)-3a+1$，$y_2=a(m-1)^2-3a(m-1)-3a+1$，

$\because y_1<y_2$，

$\therefore a(m+1)^2-3a(m+1)-3a+1<a(m-1)^2-3a(m-1)-3a+1$，

$\therefore 2am<3a$，

$\because a<0$，

$\therefore m>\frac{3}{2}$；

（3）$\because y=ax^2-3ax-3a+1=a(x-\frac{3}{2})^2+\frac{4-21a}{4}$，

$\therefore$抛物线顶点为$(\frac{3}{2}$，$\frac{4-21a}{4})$，对称轴为直线$x=\frac{3}{2}$，

当顶点$(\frac{3}{2}$，$\frac{4-21a}{4})$在线段GH上时，抛物线与线段GH有且只有一个交点，

$\therefore \frac{4-21a}{4}=3$，

解得$a=-\frac{8}{21}$；

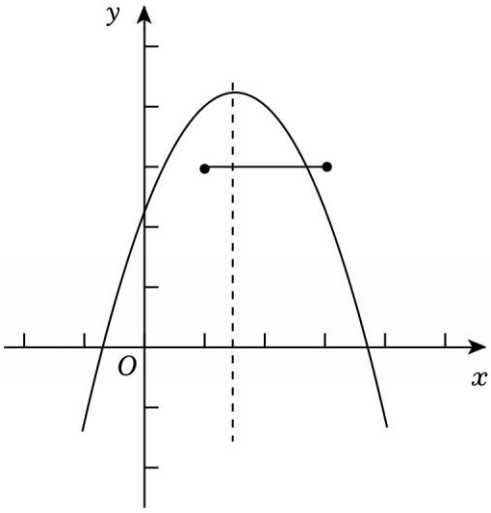
当抛物线$y=ax^2-3ax-3a+1$过$G(1,3)$时，$3=a-3a-3a+1$，

解得$a=-\frac{2}{5}$，

当抛物线$y=ax^2-3ax-3a+1$过$G(3,3)$时，$3=9a-9a-3a+1$，

解得$a=-\frac{2}{3}$，

如图：



根据$|a|$越大，抛物线开口越小可知，抛物线与线段GH有且只有一个交点（不含端点G、H），a的范围是$-\frac{2}{3}<a<-\frac{2}{5}$.

综上所述，$a=-\frac{8}{21}$或$-\frac{2}{3}<a<-\frac{2}{5}$.

【点评】本题考查二次函数的综合应用，涉及到待定系数法求函数解析式，抛物线与线段的交点，综合性强，难度大，属于压轴题，正确的求出函数解析式，利用数形结合和分类讨论的思想，进行求解，是解题的关键.