

数学试题

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 下列四个数中,最小的数是

- A. -1 B. 0 C. 1 D. $-\frac{3}{2}$

2. 中国空间站(又称天宫空间站)是我国建成的国家级太空实验室,其轨道高度设定在约 425000 米,设定寿命为 10 年,可以长期驻留 3 人,最大可扩展为 180 吨级六舱组合体,以进行较大规模的空间应用。将数据 425000 用科学记数法表示为

- A. 42.5×10^4 B. 0.425×10^6 C. 4.25×10^5 D. 4.25×10^6

3. 未来将是一个可以预见的 AI 时代,下列是世界著名人工智能品牌公司的图标,其中是中心对称图形但不是轴对称图形的是



A



B



C



D

4. 图 1 是某校运动会颁奖时的场景,图 2 是领奖台的示意图,则此领奖台的左视图是



图1



正面

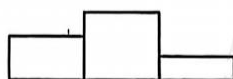
图2



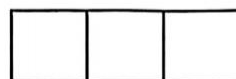
A



B



C



D

5. 下列计算正确的是

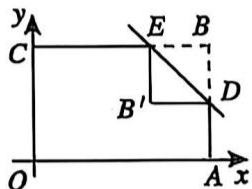
A. $a^3 \cdot a^3 = a^9$

B. $(a - 3b)^2 = a^2 - 9b^2$

C. $(-2a^2)^3 = -8a^6$

D. $x^6 \div x^2 = x^3$

6. 如图, 长方形 $OABC$ 的边 OA, OC 分别在 x 轴、 y 轴上, 点 B 的坐标为 $(3, 2)$, 点 D, E 分别在 AB, BC 边上。若 $BD = 1$, 沿直线 DE 将 $\triangle BDE$ 翻折, 点 B 落在点 B' 处, 此时 $B'D \parallel x$ 轴, 则点 B' 的坐标为



A. $(1, 1)$

B. $(2, 1)$

C. $(1.5, 1)$

D. $(1.5, 1.5)$

7. 五一期间, “泰山”、“沂蒙山”、“济南趵突泉”、“青岛崂山”四个旅游景点游人如织。若小明想从这四个景点中随机选择两个景点游览, 则这两个景点中有“泰山”的概率是

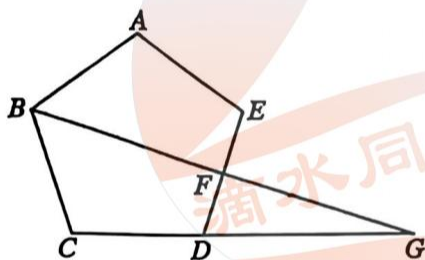
A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{5}$

8. 点 F 是正五边形 $ABCDE$ 边 DE 的中点, 连接 BF 并延长与 CD 延长线交于点 G , 则 $\angle BGC$ 的度数为



A. 18°

B. 20°

C. 24°

D. 26°

9. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle ABC$ 为锐角, 点 E 在边 AD 上, 连接 BE, CE , 且 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle DCE}$. F 是边 BC 的中点, 连接 EF , 对角线 AC 分别与 BE, EF 相交于点 G, H . 则下列结论:

①点 E 是 AD 的中点; ② $HA = HC$;

③ $FH = \frac{1}{2} AB$; ④ $AG : GH : HC = 2 : 1 : 3$.

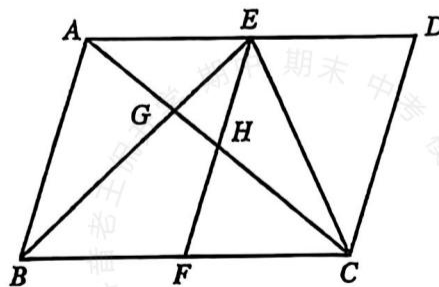
其中正确结论的个数为

A. 1


B. 2

C. 3

D. 4




10. 学校根据上级文件要求,打算安排七、八年级师生进行研学活动。某班两位同学关于租车方案讨论如下:



现有甲、乙两种类型的客车,已知每辆甲车的载客量要比乙车多15人,在无空座的情况下,480人需要乙种客车的数量是360人需要甲种客车数量的2倍。

若我们安排七、八年级的240名师生集体外出活动,可以租用甲、乙种客车共6辆(要求两种类型的客车都要租),一次将全部师生送到指定地点。



对,你的问题我可以用列方程来解决。

不过甲车的租用费用比乙车的贵120元,每辆甲种客车的租金为400元。

根据他们的对话得到以下四个结论:

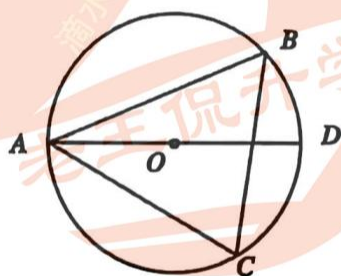
- ①若租用4辆甲型客车与3辆乙型客车,则总载客量为270人; ②共有两种租车方案;
③租车最低费用是2160元; ④两种方案的租车费用一样多。

其中正确的结论是

- A. ①② B. ①②③ C. ②③ D. ①②④

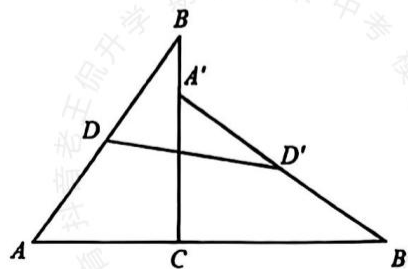
二、填空题:本题共5小题,每小题4分,共20分。

11. 当二次根式 $\sqrt{x-3}$ 的运算结果为整数时,写出一个符合要求的 x 值_____。
12. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AD 是 $\odot O$ 的直径,若 $\angle ACB = 65^\circ$, 则 $\angle BAD$ 的度数是_____。



13. 已知两个不相等的实数 x_1, x_2 , 满足: $x_1^2 + 3x_1 - 5 = 0, x_2^2 + 3x_2 - 5 = 0$, 则 $x_1 + x_2 =$ _____。
14. 研究数轴我们可以发现许多重要的规律。例如:若数轴上点 A 、点 B 表示的数分别为 a 、 b , 则 A, B 两点之间的距离 $AB = |a - b|$, 线段 AB 的中点表示的数为 $\frac{a+b}{2}$ 。若 $a < b$, 数轴上动点 Q 表示的数为 x , 点 Q 到点 A, B 的距离和为 S 。则下列结论正确: ① $S = |x - a| + |x - b|$; ② 当 $x > b$ 时, S 随 x 的增大而增大; ③ S 的最小值不随 x 的变化而变化; ④ 线段 QA, QB 的中点之间的距离为 $b - a$ 。其中正确结论的序号是_____。

15. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ, AC = 4$, D 为 AB 边上一点, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle A'B'C$, 点 A' 落在线段 BC 上, 此时 A, C, B' 三点也恰好共线, 点 D 的对应点为 D' , 连接 DD' , 则 DD' 长度的最小值为_____。



三、解答题:本题共8小题,共90分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (10分)

(1) 计算: $2 \sin 60^\circ + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - |\sqrt{3} - 2|$;

(2) 先化简,再求值: $\frac{x-2}{x^2-2x+1} \div \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$, 再从1,2,3中选择一个合适的数作为 x 的值代入求值。

17. (11分)

在 $\triangle ABC$ 中按以下步骤进行尺规作图。

(1) ①以 B 为圆心,任意长为半径画弧,交 BA 于点 M ,交 BC 于点 N ;

②以点 C 为圆心,以 BM 长为半径画弧交 CA 于点 P ;

③以点 P 为圆心,以 MN 长为半径画弧交前弧于点 Q ;

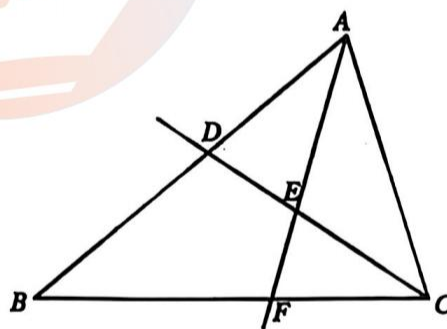
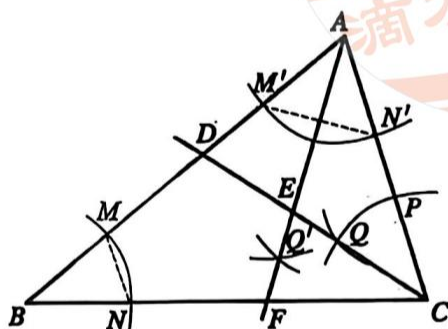
④作射线 CQ 交 AB 于点 D 。

(2) 以点 A 为圆心,任意长为半径画弧,分别交 AB 、 AC 于点 M' 、 N' 。分别以点 M' 、 N' 为圆心,以大于 $\frac{1}{2} M'N'$ 的长为半径画弧,两弧交于点 Q' ,作射线 AQ' 交 CD 于点 E ,交 BC 于点 F 。

请根据上述尺规作图过程,

(1) 证明: $CE = CF$;

(2) 已知 $AB = 9$, $AC = 6$, 求 $\frac{BF}{CF}$ 的值。



18. (10分)

如图 1, 反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ ($k_1 \neq 0$) 与一次函数 $y = k_2x + b$ ($k_2 \neq 0$) 的图象交于点 $A(-1, 3)$, 点 $B(m, 1)$, 一次函数与 x 轴、 y 轴相交于点 C 、 D 。

(1) ①求反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 和一次函数 $y = k_2x + b$ 的表达式;

②直接写出关于 x 的不等式 $k_2x + b - \frac{k_1}{x} > 0$ 的取值范围;

(2) 如图 2, 点 E 为一次函数 $y = k_2x + b$ 的图象上一点, 过点 E 作反比例函数 $y = \frac{k_3}{x}$ ($k_3 < 0$), 连接 OE , 若 $\triangle OEC$ 面积为 S , 当 $2 \leq S \leq 4$ 时, 求 k_3 的取值范围。

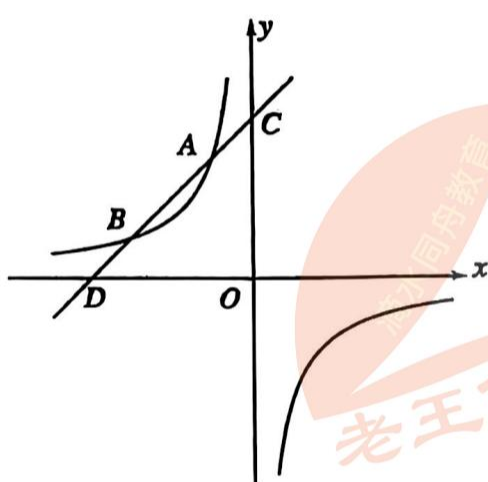


图1

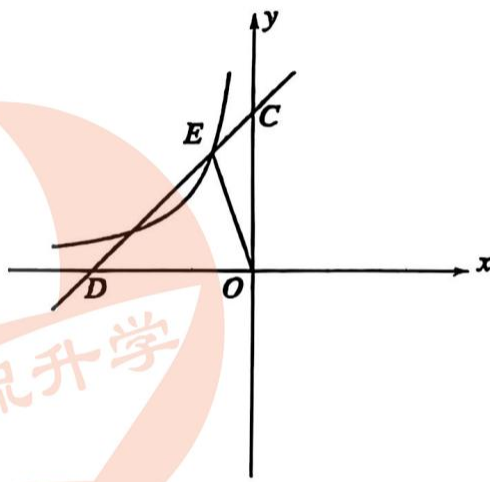
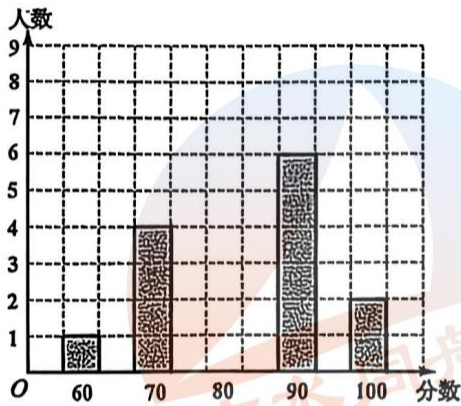
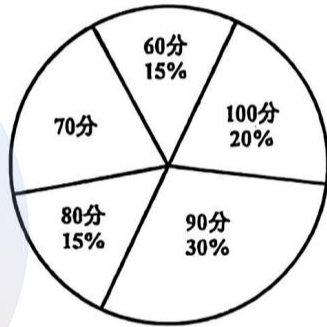


图2

19. (10分)

为进一步挖掘和传承泰山文化、普及有关泰山知识,某校开展了“泰山文化知识竞赛”活动,进一步提升学生的爱家乡、爱祖国的浓厚情怀,该校举办了泰山文化知识竞赛,现从全校七、八年级学生中随机抽取20名学生竞赛成绩(百分制). 数学兴趣小组对竞赛成绩进行统计分析,形成如下报告(不完整):

主题项目	泰山文化知识竞赛成绩分析报告																	
数据收集	七年级学生成绩 80, 80, 100, 90, 80, 70, 70, 80, 70, 90, 70, 80, 100, 90, 60, 80, 90, 80, 90, 90	八年级学生成绩 90, 90, 100, 80, 80, 60, 70, 80, 60, 100, 60, 70, 100, 70, 90, 90, 90, 70, 100, 90																
数据整理 与分析	<div>七年级学生成绩条形统计图</div>  <div>八年级学生成绩扇形统计图</div>  <div>七、八年级学生成绩分析表</div> <table><tr><th>统计量 年级</th><th>平均数</th><th>中位数</th><th>众数</th><th>方差</th></tr><tr><td>七年级</td><td>82</td><td>80</td><td>80</td><td>106</td></tr><tr><td>八年级</td><td>82</td><td>a</td><td>90</td><td>186</td></tr></table>		统计量 年级	平均数	中位数	众数	方差	七年级	82	80	80	106	八年级	82	a	90	186	
	统计量 年级	平均数	中位数	众数	方差													
七年级	82	80	80	106														
八年级	82	a	90	186														
任务1	①补全条形统计图; ②求“扇形统计图”中70分所在扇形圆心角度数; ③直接写出成绩分析表中,八年级学生成绩的中位数 $a =$ _____																	
任务2	该校七年级学生共1500人,请估计成绩不低于80分的人数;																	
任务3	根据上述统计数据,你认为哪个年级的成绩更好? 请说明理由。																	

根据所给信息,请完成以上所有任务。

20. (11分)

自行车骑行是一项充满乐趣和挑战的爱好。通过骑自行车,可以享受自由、放松身心,增强体力和耐力,欣赏大自然的美景,还可以与他人一同分享美妙的体验。图1为一骑行山地车,图2是该车的车架示意图,已知立管 AC 与上管 AD 垂直,立管 AC 比上管 AD 短10cm,前下管 $CD = 50\text{cm}$,后下叉 BC 与立管 AC 所成的夹角为 74° ,即 $\angle ACB = 74^\circ$ 。

(1)求立管 AC 的长;

(2)当 $\angle B = 45^\circ$ 时,求后下叉 BC 的长。(结果精确到1cm,参考数据 $\sin 74^\circ \approx 0.96$, $\cos 74^\circ \approx 0.27$, $\tan 74^\circ \approx 3.48$)

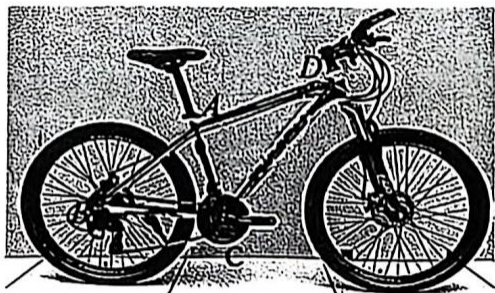


图1

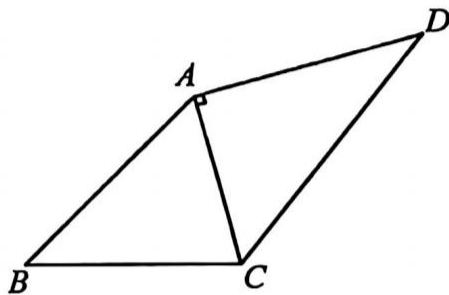


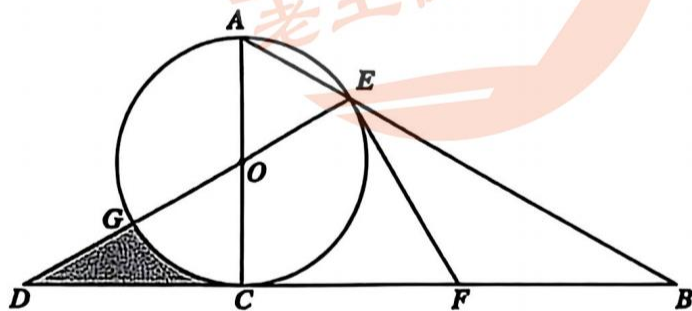
图2

21. (12分)

如图,在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$,以 AC 为直径作 $\odot O$ 交斜边 AB 于点 E 。连接 EO 并延长交 BC 的延长线于点 D ,交 $\odot O$ 于点 G 。 F 为 BC 中点,连接 EF 。

(1)求证: EF 是 $\odot O$ 的切线;

(2)若 $AE = OE = 3$,求阴影部分的面积。



22. (12分)

综合与实践

在学习了角平分线的性质与判定以后,数学兴趣小组继续进行了以下探究:

【动手实践】

用两段铁丝分别折成一个锐角 $\angle A$ 、一个钝角 $\angle B$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$,在锐角 $\angle A$ 的两边分别截取 $AC = AD$,在平面内 $\angle B$ 与 $\angle A$ 相对放置,并且 $\angle B$ 的两边刚好经过点 C 、点 D ,连接 AB (如图1),兴趣小组通过测量发现 $\angle CBA = \angle DBA$ 。

【提出猜想】

兴趣小组提出猜想：

有一组邻边相等、对角互补的四边形中，经过两条相等邻边的公共顶点的一条对角线，必平分四边形的一个内角。

【验证猜想】

兴趣小组通过观察、探究，提出以下两种证明思路。

思路一：如图2，过点A作BC垂线交BC的延长线于点E，过点A作BD的垂线，垂足为F，证明AB平分 $\angle CBD$ 。

思路二：如图3，延长BD到点E，使得 $DE = BC$ ，连接AE。证明AB平分 $\angle CBD$ 。

请从两种思路选择一种给出完整证明，帮助兴趣小组验证猜想。

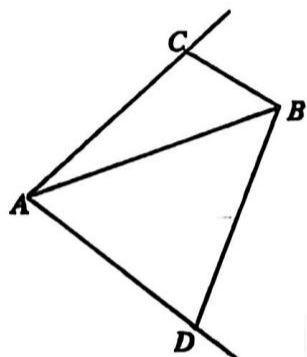


图1

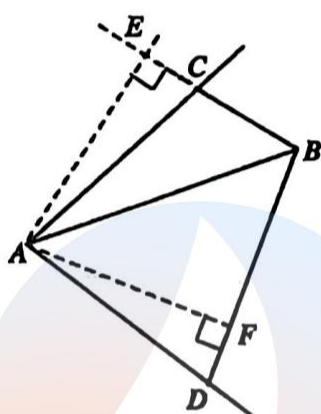


图2

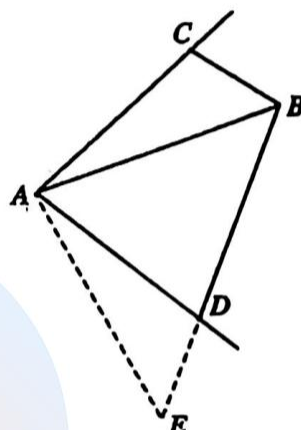


图3

【拓展应用】

在平面内，兴趣小组用一根长铁丝围成一个四边形(如图4)， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $AD = DC$ 。

- (1)请直接写出 $\angle ABD =$ ____度；
- (2)经测量 $BD = 30\text{cm}$ ，求四边形ABCD的面积。

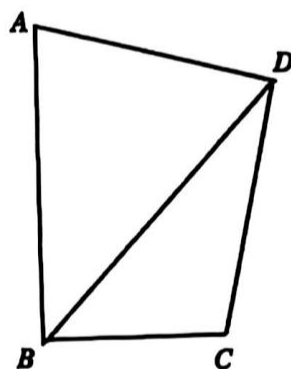


图4

23. (14分)

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = 1$ 。

(1)若 $a = 1$,

①求 b 的值；

②若抛物线与 x 轴相交于点A、B两点，与 y 轴相交于点 $C(0, -3)$ ，求AB的长；

(2)当 $-1 \leq x \leq 4$ 时，函数 $y = ax^2 + bx + c$ 最大值与最小值的差为3，求出 a 的值；

(3)若 $a = -1$ ，平面内有两个点 $M(-2, 3)$ 、 $N(3, 3)$ ，抛物线与线段MN有且只有一个公共点，求出 c 的取值范围。